Title	離散ソリトン方程式における解の構造
Author(s)	辻本, 諭
Citation	数理解析研究所講究録 (1997), 1005: 28-36
Issue Date	1997-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/61453
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1005巻 1997年 28-36

離散ソリトン方程式における解の構造

辻本 諭
Satoshi TSUJIMOTO

早稲田大学理工学部情報学科
School of Science and Engineering, Waseda University

1 はじめに

KP方程式の解に無限の独立変数を導入することにより、無限のヒエラルキーが得られ、保存量などとの対応関係を持つことが良く知られている。離散系のソリトン方程式においても、同様に無限個の離散独立変数を導入することにより、無限個の離散方程式を得ることは、可能である。しかし、そのようにして得られたヒエラルキーと高次保存量との関連性はまだ未知である。本稿では、離散ソリトン方程式の一例として、離散Lotka-Volterra方程式を取り上げ、その高次保存量のτ関数表現を通し、連続系との関連を見る。続いて、佐藤理論のアイデアを用い、離散化ソリトン方程式のヒエラルキーを導出し、離散ソリトン方程式における解の構造について考察を深めたい。

2 連続・離散KP方程式

時間の変数が連続変数であるKP方程式の双線形方程式は次式で与えられる。(x, y, t: 独立変数)

$$(D_x^4 - 4D_xD_t + 3D_y^2)\tau \cdot \tau = 0 \tag{1}$$

また、その離散化であるdiscrete KP (d-KP) 方程式は、l, m, n を離散時間の独立変数, 差分間隔を a, b, c とすると、次のように表せる。

$$\begin{aligned} &a(b-c)\tau(l-a,m,n)\tau(l,m-b,n-c)\\ &+b(c-a)\tau(l,m-b,n)\tau(l-a,m,n-c)\\ &+c(a-b)\tau(l,m,n-c)\tau(l-a,m-b,n)=0 \end{aligned} \tag{2}$$

(1)式と(2)式はそれぞれ行列式で表せる厳密解を持つ。

$$\tau_{KP} = \det\left|\frac{\partial^{j-1}\varphi_i}{\partial x^{j-1}}\right|_{1\le i,j\le N} \tag{3}$$

$$\tau_{d-KP} = \det\left|\varphi_i(l,m,n,s+j-1)\right|_{1\le i,j\le N} \tag{4}$$

KP方程式の行列式解は、ロンスキアンと呼ばれ, またd-KP方程式の解はその離散化であるカソラチアンで表されている。

ここで、KP および d-KP 方程式の行列式解の要素$\varphi_i (n = 1, 2, \cdots, \infty)$ はそれぞれ次の線形方程式 (分散関係) を満たす。

- KP 方程式の場合 $(x_1 = x, x_2 = y, x_3 = t, \cdots.)$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} = \frac{\partial^n \varphi_i}{\partial x^n} \tag{5}$$

- d-KP 方程式の場合

$$\begin{aligned}\Delta_{-l}\varphi_i(l,m,n,s) = \Delta_{-m}\varphi_i(l,m,n,s) &= \Delta_{-n}\varphi_i(l,m,n,s) \\ &= \varphi_i(l,m,n,s+1)\end{aligned} \tag{6}$$

$\Delta_{-l}, \Delta_{-m}, \Delta_{-n}$は、次式で定義される後退差分である。

$$\Delta_{-l}\varphi_i \equiv [\varphi_i(l) - \varphi_i(l-1)]/a \tag{7}$$

$$\Delta_{-m}\varphi_i \equiv [\varphi_i(m) - \varphi_i(m-1)]/b \tag{8}$$

$$\Delta_{-n}\varphi_i \equiv [\varphi_i(n) - \varphi_i(n-1)]/c \tag{9}$$

この KP 方程式と d-KP 方程式の解は次の無限個の離散変数と連続変数の間の変数変換により関係づけられている。[4)]

$$x_k = l\frac{a^k}{k} + m\frac{b^k}{k} + n\frac{c^k}{k} + \cdots.(\text{for } k = 1, 2, \cdots) \tag{10}$$

(6) 式の示すように, 離散方程式における独立変数$l, m, n, \ldots$ らの分散関係は 1 次の線形方程式であり、より高次の離散変数は導入されていない。一方、連続系では、高次の独立変数を用いた方程式が存在し、それらと高次の保存量が対応している。

3 離散戸田格子ヒエラルキー

離散系の場合においても高次の離散変数を導入することにより、離散方程式のヒエラルキーが得られることを示す。本稿では、離散戸田方程式系列の場合について考察する。[1)] これにより、上野、高崎先生による 2 次元戸田格子系列の理論の自然な拡張が得られ、離散系においても同様な議論が展開できることを示したい。

3.1 Linear system

差分演算子 $L, M, L_n^{(k)}, M_n^{(l)}$を次に定義する。

$$L = e^{\partial_s} + u_1 + u_2 e^{-\partial_s} + u_3 e^{-2\partial_s} + \cdots \tag{11-a}$$

$$M = v_0 e^{-\partial_s} + v_1 + v_2 e^{\partial_s} + v_3 e^{2\partial_s} + \cdots \tag{11-b}$$

$$L_n^{(k)} = e^{n\partial_s} + u_1^{(n)} e^{(n-1)\partial_s} + u_2^{(n)} e^{(n-2)\partial_s} + u_3^{(n)} e^{(n-3)\partial_s} + \cdots, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{11-c}$$

$$\begin{aligned} M_n^{(l)} = {} & v_0^{(n)} e^{-n\partial_s} + v_1^{(n)} e^{(-n+1)\partial_s} \\ & + v_2^{(n)} e^{(-n+2)\partial_s} + v_3^{(n)} e^{(-n+3)\partial_s} + \cdots, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{11-d}$$

ここでは、$\frac{\partial}{\partial s}$を$\partial_s$している。よって、$e^{\partial_s}$は独立変数 “$S$” に対するシフト演算子を意味する。また、演算子 $L, M, L_n^{(k)}, M_n^{(l)}$における $e^{i\partial_s}$の係数$v_0 = v_0(s;x,y;k,l), v_0^{(n)} = v_0^{(n)}(s;x,y;k,l), \ldots$ は, $s, x = (x_1, x_2, \ldots), y = (y_1, y_2, \ldots), k = (k_1, k_2, \ldots), l = (l_1, l_2, \ldots)$ の関数である。(x, y は連続変数であり, s, k, lは独立離散変数を示す)

λを固有値とする固有関数$\psi^{(\infty)}, \psi^{(0)}$に対する線形システムを次に示す。

$$
\begin{aligned}
L\psi^{(\infty)} &= \lambda\psi^{(\infty)} && \text{(12-a)}\\
M\psi^{(0)} &= \frac{1}{\lambda}\psi^{(0)} && \text{(12-b)}\\
L_n^{(k)}\psi^{(\infty)} &= \frac{\lambda^n}{1+a_n\lambda^n}e^{\partial_{k_n}}\psi^{(\infty)} && \text{(12-c)}\\
M_n^{(l)}\psi^{(0)} &= \frac{\lambda^{-n}}{1+b_n\lambda^{-n}}e^{\partial_{l_n}}\psi^{(0)} && \text{(12-d)}\\
\frac{\partial\psi}{\partial x_n} &= B_n\psi,\ n = 1,2,3,\ldots && \text{(12-e)}\\
\frac{\partial\psi}{\partial y_n} &= C_n\psi,\ n = 1,2,3,\ldots && \text{(12-f)}\\
\Delta_{k_n}\psi &= B_n^{(k)}\psi,\ n = 1,2,3,\ldots && \text{(12-g)}\\
\Delta_{l_n}\psi &= C_n^{(l)}\psi,\ n = 1,2,3,\ldots && \text{(12-h)}
\end{aligned}
$$

(ここでψは、$\psi^{(\infty)}$あるいは$\psi^{(0)}$を意味する。) 演算子 $B, C, B_n^{(k)}, C_n^{(l)}$は、次の通り定義される。

$$
\begin{aligned}
B_n &= (L^n)_+,\ C_n = (M^n)_- && \text{(13-a)}\\
B_n^{(k)} &= (L_n^{(k)})_+,\ C_n^{(l)} = (M_n^{(l)})_- && \text{(13-b)}
\end{aligned}
$$

(13) 式中の $_+$は, e^{∂_s}の正ベキの項 ($e^{0\partial_s}$を含む) を取る事を意味する。($_-$は, e^{∂_s}の負ベキの項を取る事を意味する。) また、差分演算子$\Delta_{k_n}, \Delta_{l_n}$は, 前進差分演算子である。

$$
\begin{aligned}
\Delta_{k_n} &= \frac{1}{a_n}(e^{\partial_{k_n}} - 1) && \text{(14-a)}\\
\Delta_{l_n} &= \frac{1}{b_n}(e^{\partial_{l_n}} - 1) && \text{(14-b)}
\end{aligned}
$$

ここで、$a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ は、それぞれ、離散変数 $k_1, k_2, \ldots, l_1, l_2, \ldots$ の差分間隔である。

(12-a),(12-b), (12-e), (12-f) の両立条件より、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_n} &= [B_n, L],\ \frac{\partial L}{\partial y_n} = [C_n, L] && \text{(15-a)}\\
\frac{\partial M}{\partial x_n} &= [B_n, M],\ \frac{\partial M}{\partial y_n} = [C_n, M] && \text{(15-b)}
\end{aligned}
$$

を得る。$[X, Y] \equiv XY - YX$

ザハロフ・シャバト型に書けば、次の通り書き表せる。

$$\frac{\partial B_m}{\partial x_n} - \frac{\partial B_n}{\partial x_m} + [B_m, B_n] = 0 \tag{16-a}$$
$$\frac{\partial C_m}{\partial y_n} - \frac{\partial C_n}{\partial y_m} + [C_m, C_n] = 0 \tag{16-b}$$
$$\frac{\partial B_m}{\partial y_n} - \frac{\partial C_n}{\partial x_m} + [B_m, C_n] = 0 \tag{16-c}$$

これが、戸田格子ヒエラルキーであり、2 次元戸田格子方程式

$$\frac{\partial}{\partial x_1} v_0(s) = v_0(s)\left(u_1(s) - u_1(s-1)\right) \tag{17-a}$$
$$\frac{\partial}{\partial y_1} u_1(s) = -v_0(s+1) + v_0(s) \tag{17-b}$$

を含む。

(12-c),(12-d), (12-g), (12-h) の両立条件より、

$$\Delta_{k_n}(L_m^{(k)}) = [B_n^{(k)}, L_m^{(k)}]_{k_m,k_n}, (m \neq n) \tag{18-a}$$
$$\Delta_{k_n}(M_m^{(l)}) = [B_n^{(k)}, M_m^{(l)}]_{l_m,k_n} \tag{18-b}$$
$$\Delta_{l_n}(L_m^{(k)}) = [C_n^{(l)}, L_m^{(k)}]_{k_m,l_n} \tag{18-c}$$
$$\Delta_{l_n}(M_m^{(l)}) = [C_n^{(l)}, M_m^{(l)}]_{l_m,l_n}, (m \neq n) \tag{18-d}$$
$$0 = [L_m^{(k)}, L_n^{(k)}]_{k_n,k_m} \tag{18-e}$$
$$0 = [M_m^{(k)}, M_n^{(k)}]_{l_n,l_m} \tag{18-f}$$

を得る。$[X,Y]_{x,y} \equiv (e^{\partial x}X)Y - (e^{\partial y}Y)X$

(18) 式のザハロフ・シャバト型の表記は、

$$[1+a_m B_m^{(k)}(k_m, l_n+1)][1+b_n C_n^{(l)}(k_m, l_n)]$$
$$=[1+b_n C_n^{(l)}(k_m+1, l_n)][1+a_m B_m^{(k)}(k_m, l_n)] \tag{19-a}$$
$$[1+a_m B_m^{(k)}(k_m, k_n+1)][1+a_n B_n^{(k)}(k_m, k_n)]$$
$$=[1+a_n B_n^{(k)}(k_m+1, k_n)][1+a_m B_m^{(k)}(k_m, k_n)] \tag{19-b}$$
$$[1+b_m C_m^{(l)}(l_m, l_n+1)][1+b_n C_n^{(l)}(l_m, l_n)]$$
$$=[1+b_n C_n^{(l)}(l_m+1, l_n)][1+b_m C_m^{(l)}(l_m, l_n)] \tag{19-c}$$

である。

(18) 式あるいは (19) 式より、離散非線形方程式の無限の系列が得られる。例えば、

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{u}_1^{(1)}(s-1; k_1, l_1) v_0^{(1)}(s; k_1+1, l_1) & = & \tilde{u}_1^{(1)}(s; k_1, l_1+1) v_0^{(1)}(s; k_1, l_1) \\ \tilde{u}_1^{(1)}(s; k_1, l_1+1) - \tilde{u}_1^{(1)}(s; k_1, l_1) & = & b_1(l_1)\left(v_0^{(1)}(s; k_1+1, l_1) - v_0^{(1)}(s+1; k_1, l_1)\right) \end{array} \right. \tag{20}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \tilde{u}_1^{(1)}(s;k_1,k_2+1)\tilde{u}_1^{(2)}(s;k_1,k_2) & = & \tilde{u}_1^{(1)}(s;k_1,k_2)\tilde{u}_1^{(2)}(s;k_1+1,k_2) \\ \tilde{u}_1^{(2)}(s;k_1+1,k_2)-\tilde{u}_1^{(2)}(s+1;k_1,k_2) & = & \\ \tilde{u}_1^{(1)}(s;k_1,k_2+1)u_2^{(2)}(s;k_1,k_2) & - & \tilde{u}_0^{(1)}(s+1;k_1,k_2)u_2^{(2)}(s;k_1+1,k_2) \\ \tilde{u}_1^{(1)}(s;k_1,k_2+1)-\tilde{u}_1^{(1)}(s+2;k_1,k_2) & = & u_2^{(2)}(s;k_1+1,k_2)-u_2^{(2)}(s+1;k_1,k_2) \end{array}\right. \tag{21}$$

などが得られる。($\tilde{u}_1^{(n)} = 1/a_n + u_1^{(n)}$)

次に、線形システム (12) の形式解を考える。

独立変数 s,x,y,k,l の関数である $w_n^{(\infty)}, w_n^{(0)}, w_n^{(\infty)\#}, w_n^{(0)\#}$ を e^{∂_s} の係数に持つような差分演算子 $W^{(\infty)}$, $W^{(0)}$, $W^{(\infty)\#}$, $W^{(0)\#}$ を用意しておく。

$$W^{(\infty)} = 1 + w_1^{(\infty)}e^{-\partial_s} + w_2^{(\infty)}e^{-2\partial_s} + w_3^{(\infty)}e^{-3\partial_s} + \cdots \tag{22-a}$$
$$W^{(0)} = w_0^{(0)} + w_1^{(0)}e^{\partial_s} + w_2^{(0)}e^{2\partial_s} + w_3^{(0)}e^{3\partial_s} + \cdots \tag{22-b}$$
$$W^{(\infty)\#} = 1 + w_1^{(\infty)\#}e^{-\partial_s} + w_2^{(\infty)\#}e^{-2\partial_s} + w_3^{(\infty)\#}e^{-3\partial_s} + \cdots \tag{22-c}$$
$$W^{(0)\#} = w_0^{(0)\#} + w_1^{(0)\#}e^{\partial_s} + w_2^{(0)\#}e^{2\partial_s} + w_3^{(0)\#}e^{3\partial_s} + \cdots \tag{22-d}$$

$$W^{(\infty)-1} = 1+e^{-\partial_s}w_1^{(\infty)\#}(s+1)+e^{-2\partial_s}w_2^{(\infty)\#}(s+1)+e^{-3\partial_s}w_3^{(\infty)\#}(s+1)+\cdots \tag{23-a}$$
$$W^{(0)-1} = w_0^{(0)\#}(s+1)+e^{\partial_s}w_1^{(0)\#}(s+1)+e^{2\partial_s}w_2^{(0)\#}(s+1)+e^{3\partial_s}w_3^{(0)\#}(s+1)+\cdots \tag{23-b}$$

線形システム (12) は、演算子 $L, M, L_n^{(k)}, M_n^{(l)}$ を次の通り書き表す事により、

$$L = W^{(\infty)}e^{\partial_s}W^{(\infty)-1} \tag{24-a}$$
$$M = W^{(0)}e^{-\partial_s}W^{(0)-1} \tag{24-b}$$
$$L_n^{(k)} = W^{(\infty)}(k_n+1)e^{n\partial_s}W^{(\infty)}(k_n)^{-1} \tag{24-c}$$
$$M_n^{(l)} = W^{(0)}(l_n+1)e^{-n\partial_s}W^{(0)}(l_n)^{-1} \tag{24-d}$$

次に挙げる形式解を持つ。

$$\psi^{(\infty)} = W^{(\infty)}\psi_0 \quad \psi^{(0)} = W^{(0)}\psi_0 \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \psi_0(s;x,y;k,l) \\ &= \lambda^s \exp[\xi(x,\lambda)+\xi(y,\lambda^{-1})]\prod_{i=1}^{\infty}(1+a_{k_i}\lambda^i)^{k_i}(1+a_{l_i}/\lambda^i)^{l_i},\end{aligned} \tag{26}$$

$$\xi(x,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\lambda^n, \quad \xi(y,\lambda^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n\lambda^{-n} \tag{27}$$

3.2 カソラチ行列式解

次の連立方程式を考える。

$$W_N f_j = 0, j = 1,\ldots,N \tag{28}$$

$$W_N = e^{N\partial_s} + w_1 e^{(N-1)\partial_s} + w_2 e^{(N-2)\partial_s} + w_3 e^{(N-3)\partial_s} + \cdots + w_N \tag{29}$$

f_jを線形独立な s に関する関数とする。

$$\det |f(s), f(s+1), \cdots, f(s+N-1)| \neq 0 \tag{30}$$

これ以降, 行列式を次のように略記する。

$$\det |f(s), f(s+1), \cdots, f(s+N-1)| \equiv \det \begin{vmatrix} f_1(s) & f_1(s+1) & \cdots & f_1(s+N-1) \\ f_2(s) & f_2(s+1) & \cdots & f_2(s+N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_N(s) & f_N(s+1) & \cdots & f_N(s+N-1) \end{vmatrix} \tag{31}$$

クラーメルの公式を用い、この連立方程式を w_{N-k}について解く事により、

$$w_{N-k} = -\frac{\det |f(s), \ldots, f(s+k-1), f(s+N), f(s+k+1), \ldots, f(s+N-1)|}{\det |f(s), \ldots, f(s+N-1)|}$$
$$\text{for } k = 1, \ldots, N$$

を得る。ここで、$f_j (j = 1, 2, \ldots, N)$ を無限個の独立変数 $x = (x_1, x_2, \ldots), y = (y_1, y_2, \ldots), k = (k_1, k_2, \ldots), l = (l_1, l_2, \ldots)$ の関数だと仮定し、

$$f_j = f_j(s; x, y; k, l) = f_j(s; x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots; k_1, k_2, \ldots, l_1, l_2, \ldots)$$

独立変数 x, y, k, lに関し次の線形関係 (分散関係) を満たすことを要請する。

$$\frac{\partial f_i(s)}{\partial x_j} = f_i(s+j) \tag{32-a}$$

$$\frac{\partial f_i(s)}{\partial y_j} = f_i(s-j) \tag{32-b}$$

$$\Delta_{k_j} f_i(s) = f_i(s+j) \tag{32-c}$$

$$\Delta_{l_j} f_i(s) = f_i(s-j) \tag{32-d}$$

差分演算子 $W^{(\infty)}$および $W^{(0)}$を

$$W^{(\infty)} = W_N(x, y) e^{-N\partial_s}, \tag{33-a}$$

$$W^{(0)} = W_N(x, y) \tag{33-b}$$

とすると、(25) 式と (24) 式より, $W^{(\infty)}, W^{(0)}$が次式を満たすことは容易に確かめられる。

$$L\psi^{(\infty)} = \lambda \psi^{(\infty)}$$
$$M\psi^{(0)} = \frac{1}{\lambda}\psi^{(0)}$$
$$L_n^{(k)}\psi^{(\infty)} = \frac{\lambda^n}{1 + a_n\lambda^n} e^{\partial_{k_n}} \psi^{(\infty)}$$
$$M_n^{(l)}\psi^{(0)} = \frac{\lambda^{-n}}{1 + b_n\lambda^{-n}} e^{\partial_{l_n}} \psi^{(0)}$$

(28) 式を x_n で偏微分する事により、

$$(\partial_{x_n} W_N + W_N e^{n\partial_s}) f_i(s;x,y) = 0 \quad (i = 1, \ldots, N) \tag{34}$$

$N+n$ 次の線形差分方程式が得られる。

さらに、この $N+n$ 次の差分演算子を W_N で割ることにより、下記の形式に書き表せることができる。

$$\partial_{x_n} W_N + W_N e^{n\partial_s} = B_n W_N + R \tag{35}$$

$$B_n = \sum_{j=0}^{n} q_j(s) e^{j\partial_s}, \quad R = \sum_{j=0}^{N-1} r_j(s) e^{j\partial_s}$$

よって、

$$R f_j(s) = 0 (j = 1, \ldots, N)$$

が得られ、$f_j(s), (j = 1, \ldots, N)$ は線形独立という仮定より、

$$R = 0$$

であることが分かる。以上より、(34) 式の差分演算子は、

$$\partial_{x_n} W_N + W_N e^{n\partial_s} = B_n W_N \tag{36}$$

と W_N で割り切ることができ、B_n が求まる。

$B_n^{(k)}$ についても、関数の積に対する前進差分演算子による公式

$$\Delta_{+n} (f(n)g(n)) = \Delta_{+n} f(n) \cdot g(n) + f(n+1) \cdot \Delta_{+n} g(n)$$

を用いることにより、同様な議論が可能である。

$$[\Delta_{+k_n} W_N(k_n) + W_N(k_n+1) e^{n\partial_s}] f_n = 0 \quad (n = 1, \ldots, N)$$

$$\Delta_{+k_n} W_N(k_n) + W_N(k_n+1) e^{n\partial_s} = B_n^{(k)} W_N(k_n) \tag{37}$$

また、(28) 式を

$$W_N e^{-N\partial_s} e^{N\partial_s} f_i = 0, i = 1, \ldots, N \tag{38}$$

と書き直し、y_n で偏微分することにより、

$$(\partial_{y_n} (W_N e^{-N\partial_s}) + (W_N e^{-N\partial_s}) e^{-n\partial_s}) e^{N\partial_s} f_i(s;x,y) = 0 \quad (i = 1, \ldots, N) \tag{39}$$

が得られる。

(39) 式の差分演算子も、e^{∂_s} が正ベキの時の議論と同様に

$$\partial_{y_n} W_N e^{-N\partial_s} + W_N e^{-(n+N)\partial_s} = C_n W_N e^{-N\partial_s} \tag{40}$$

$$C_n = \sum_{j=0}^{n} q_j(s) e^{-j\partial_s} \tag{41}$$

$$[\Delta_{+l_n} W_N(l_n) e^{-N\partial_s} + W_N(l_n+1) e^{-N\partial_s} e^{-n\partial_s}] = C_n^{(l)} W_N(l_n) e^{-N\partial_s} \tag{42}$$

$$C_n^{(l)} = \sum_{j=0}^{n} q_j^{(l)}(s) e^{-j\partial_s} \tag{43}$$

が得られる。
(36), (37), (40), (42) 式より、この $W^{(\infty)}$ $W^{(0)}$は (12) 式の解となっていることがわかる。

4 The discrete Toda lattice hierarchy

あらためて離散戸田格子系列を示す。(12-a), (12-b), (12-g), (12-h) 式の両立条件より、次の行列方程式が得られる。

$$R(k_i, l_j+1) L(k_i, l_j) = L(k_i+1, l_j) R(k_i, l_j), \quad \text{for } i, j = 1, 2, 3, \dots \tag{44}$$

ここで、行列 R, L は以下で定義する。

$$L(k_i, l_j) = \begin{pmatrix}
\ddots & & & & & & \mathbf{0} & & \\
\ddots & 1 & & & & & & & \\
 & V_{-2}^{(1)} & 1 & & & & & & \\
\ddots & & V_{-1}^{(1)} & 1 & & & & & \\
 & V_0^{(j)} & \cdots & V_0^{(1)} & 1 & & & & \\
 & & V_1^{(j)} & \cdots & V_1^{(1)} & 1 & & & \\
 & & & V_2^{(j)} & \cdots & V_2^{(1)} & 1 & & \\
 & & & & V_3^{(j)} & \cdots & V_3^{(1)} & 1 & \\
 & & \mathbf{0} & & & \ddots & & \ddots & \ddots
\end{pmatrix}$$

$$R(k_i, l_j) = \begin{pmatrix}
\ddots & & \ddots & \ddots & & & \mathbf{0} & & \\
 & V_{-3}^{(0)} & \cdots & V_{-3}^{(i-1)} & 1 & & & & \\
 & & V_{-2}^{(0)} & \cdots & V_{-2}^{(i-1)} & 1 & & & \\
 & & & V_{-1}^{(0)} & \cdots & V_{-1}^{(i-1)} & 1 & & \\
 & & & & V_0^{(0)} & \cdots & V_0^{(i-1)} & 1 & \\
 & & & & & V_1^{(0)} & \cdots & V_1^{(i-1)} & \ddots \\
 & & & & & & V_2^{(0)} & & \ddots \\
 & & & & & & & V_3^{(0)} & \\
 & & \mathbf{0} & & & & & & \ddots
\end{pmatrix}$$

また、従属変数もあらたにとり直しており、$I^{(0)}, I^{(1)}, I^{(2)}, V^{(1)}, V^{(2)}$ を $u_i^{(i)}(s), v_{j-1}^{(j)}(s)$ の変数で表せば、次の通りである。

$$
\begin{aligned}
I_s^{(0)} &= 1 + a_i u_i^{(i)}(s) \\
I_s^{(1)} &= a_i u_{i-1}^{(i)}(s) \\
I_s^{(2)} &= a_i u_{i-2}^{(i)}(s) \\
&\cdots \\
V_s^{(1)} &= b_j v_{j-1}^{(j)}(s) \\
V_s^{(2)} &= b_j v_{j-2}^{(j)}(s) \\
V_s^{(3)} &= b_j v_{j-3}^{(j)}(s) \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

ここでは無限の格子上での厳密解を議論してきたが、この方程式の分子解を考え、k_i, l_j の 2 次元を 1 次元におとすことにより、行列の固有値計算の LR アルゴリズムとの対応関係が得られると思われる。

参考文献

[1] K.Ueno and K.Takasaki, *The toda lattice hierarchy*, in Group Representation and Systems of Differential Equations, vol. 4 of Adv.Stud. in Pure Math., Kinokuniya, Tokyo, 1984, pp. 1–139.

[2] R.Hirota, S.Tsujimoto, and T.Imai, *Difference Scheme of Soliton Equations*, in Future Directions of Nonlinear Dynamics in Physics and Biological Systems, P.L.Christiansen, J.C.Eilbeck, and R.D.Parmentier, eds., vol. 312 of Series B:Physics, Plenum, 1992, pp. 7–15.

[3] R.Hirota, Y.Ohta, and J.Satsuma, *Wronskian structures of solutions for soliton Equations*, Prog.Theor.Phys.Suppl., 94 (1988), pp. 59–72.

[4] T.Miwa, *On Hirota's Difference Equations*, Proc.Jpn.Acad., 58 (1982), pp. 9–12.

[5] Y.Ohta, R.Hirota, S.Tsujimoto, and T.Imai, *Casorati and Discrete Gram Type Determinant Representations of Solutions to the Discrete KP Hierarchy*, J.Phys.Soc.Jpn., 62 (1993), pp. 1872–1886.